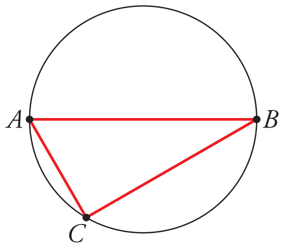
Soluciones a "Ejercicios y problemas"

PÁGINA 185

Piensa y resuelve

35 ▼▽▽ **Dibuja un triángulo ABC inscrito en una circunferencia, de modo que los vértices A y B sean extremos de un diámetro y el arco $\overset{\frown}{AC}$ sea la sexta parte de la circunferencia. ¿Cuánto miden sus ángulos?**



$$\overset{\frown}{AC} = 60° \rightarrow \hat{B} = 30°$$

$$\overset{\frown}{AB} = 180° \rightarrow \hat{C} = 90°$$

$$\hat{A} = 180° - \hat{B} - \hat{C} = 60°$$

36 ▼▽▽ **Se llama triángulo heroniano al que tiene lados enteros y área entera. Triángulos rectángulos con lados y área enteros ya se conocían mucho antes de la época de Herón, pero a él se atribuye el descubrimiento del triángulo de lados 13, 14, 15 y área 84 (no es rectángulo, pero tiene lados y área enteros). El nombre de triángulos heronianos es un homenaje a Herón por este descubrimiento.**

Aplica la fórmula de Herón para hallar el área de cada uno de estos triángulos de los que conocemos sus lados:

a) 13 cm, 14 cm, 15 cm (comprueba que es 84 cm²).

b) 5 m, 5 m, 6 m.

c) 13 dm, 20 dm, 21 dm.

d) 25 cm, 34 cm, 39 cm.

Fórmula de Herón:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde a, b y c son los lados del triángulo y s es la mitad de su perímetro.

a) $s = \dfrac{13 + 14 + 15}{2} = 21$ cm

$A = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{7\,056} = 84 \text{ cm}^2$

b) $s = \dfrac{5 + 5 + 6}{2} = 8$ m

$A = \sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)} = \sqrt{144} = 12 \text{ m}^2$

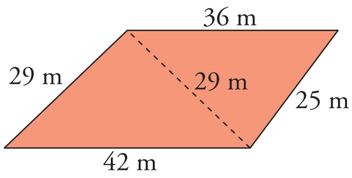
c) $s = \dfrac{13 + 20 + 21}{2} = 27$ dm

$A = \sqrt{27(27-13)(27-20)(27-21)} = \sqrt{15\,876} = 126 \text{ dm}^2$

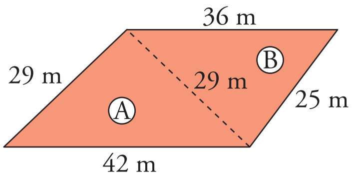
d) $s = \dfrac{25 + 34 + 39}{2} = 49$ cm

$A = \sqrt{49(49-25)(49-34)(49-39)} = \sqrt{176\,400} = 420 \text{ cm}^2$

37 ▼▽▽ **Cierta finca tiene la forma y las dimensiones indicadas en la figura. Calcula su área.**



Aplicamos la fórmula de Herón:



$$s_{Ⓐ} = \frac{29 + 29 + 42}{2} = 50 \text{ m}$$

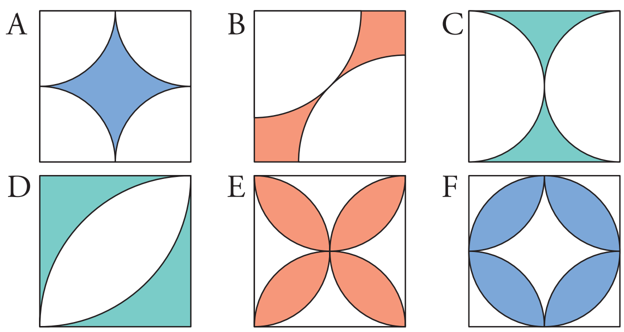
$$A_{Ⓐ} = \sqrt{50(50-29)^2(50-42)} = \sqrt{176\,400} = 420 \text{ m}^2$$

$$s_{Ⓑ} = \frac{29 + 36 + 25}{2} = 45 \text{ m}$$

$$A_{Ⓑ} = \sqrt{45(45-29)(45-36)(45-25)} = \sqrt{129\,600} = 360 \text{ m}^2$$

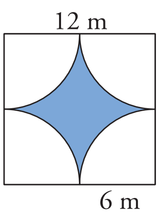
$$A_{\text{FINCA}} = A_{Ⓐ} + A_{Ⓑ} = 780 \text{ m}^2$$

38 ▼▼▽ **Calcula el área de la parte coloreada de cada uno de estos cuadrados de 12 m de lado:**



$$A_{\text{CUADRADO}} = 12^2 = 144 \text{ m}^2$$

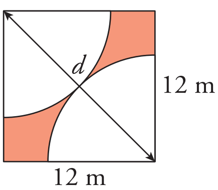
A



$$A_{1/4 \text{ CÍRCULO}} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 6^2 \approx \frac{113{,}1}{4} \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 144 - 4 \cdot \frac{113{,}1}{4} = 30{,}9 \text{ m}^2$$

B



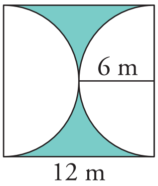
$$d = \sqrt{12^2 + 12^2} \approx 16{,}97 \text{ m}$$

$$\text{radio de circunferencias} = \frac{d}{2} \approx 8{,}49 \text{ m}$$

$$A_{1/4 \text{ CIRCUNFERENCIA}} = \frac{\pi \cdot 8{,}49^2}{4} = 56{,}61 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 144 - 2 \cdot 56{,}61 = 36{,}78 \text{ m}^2$$

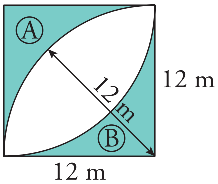
C



$$A_{1/2 \text{ CÍRCULO}} = \frac{\pi \cdot 6^2}{2} \approx \frac{113,1}{2} \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 144 - 2A_{1/2 \text{ CÍRCULO}} = 144 - 113,1 = 30,9 \text{ m}^2$$

D

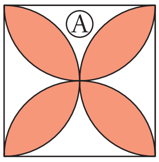


$$A_{1/4 \text{ CÍRCULO}} = \frac{\pi \cdot 12^2}{4} \approx 113,1 \text{ m}^2$$

$$A_{Ⓐ} = A_{Ⓑ} = 144 - 113,1 = 30,9 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 2 \cdot 30,9 = 61,8 \text{ m}^2$$

E

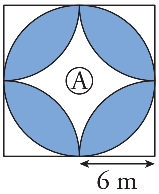


Área de parte coloreada en apartado c) = 30,9 m^2

$$A_{Ⓐ} = \frac{30,9}{2} = 15,45 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 144 - 4 \cdot 15,45 = 82,2 \text{ m}^2$$

f)



Área parte coloreada en apartado a) = 30,9 m^2

$$A_{Ⓑ} = 30,9 \text{ m}^2$$

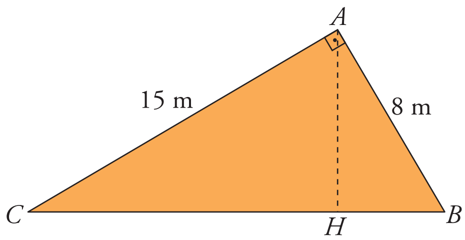
$$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 6^2 \approx 113,1 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 113,1 - 30,9 = 82,2 \text{ m}^2$$

39 ▼▼▽ **El triángulo *ABC* es un triángulo rectángulo, y *AH* es la altura sobre la hipotenusa.**

a) Demuestra que los triángulos *ABH* y *AHC* son semejantes.

b) Calcula las longitudes $\overline{BH}$ y $\overline{HC}$.



a) Los triángulos *ABC* y *ABH* son semejantes porque tienen el ángulo $\hat{B}$ en común y son rectángulos.

Los triángulos *ABC* y *AHC* son semejantes porque tienen el ángulo $\hat{C}$ en común y son rectángulos.

Por tanto, los triángulos *ABH* y *AHC* también son semejantes.

b) Aplicando el teorema de Pitágoras hallamos el lado $\overline{BC}$.

$$\overline{BC} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17 \text{ m}$$

Por ser $\widehat{AHB}$ semejante a $\widehat{CAB}$:

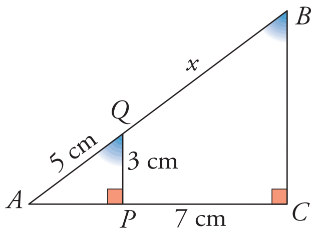
$$\frac{\overline{HB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} \rightarrow \overline{HB} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{CB}} = \frac{8^2}{17} = \frac{64}{17} \approx 3,76 \text{ cm}$$

Por ser $\widehat{AHC}$ semejante a $\widehat{BAC}$:

$$\frac{\overline{HC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{HC} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}} = \frac{15^2}{17} = \frac{225}{17} \approx 13{,}24 \text{ cm}$$

40 ▼▽▽ **a) ¿Por qué son semejantes los triángulos *APQ* y *ACB*?**

b) Calcula $x = \overline{BQ}$.



a) Son semejantes porque tienen el ángulo $\hat{A}$ en común y son los dos rectángulos. Como tienen dos ángulos iguales, el tercero también es igual.

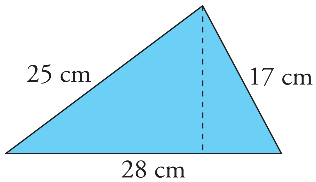
b) Calculamos $\overline{AP}$ por Pitágoras:

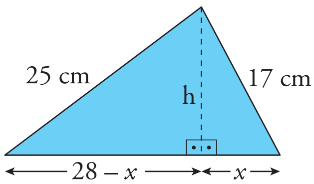
$$\overline{AP} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AQ}} \rightarrow \frac{7+4}{4} = \frac{5+x}{5} \rightarrow x = 8{,}75 \text{ cm}$$

41 ▼▼▽ **Calcula la altura de este triángulo, aplicando el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos que aparecen. Después, halla su área.**

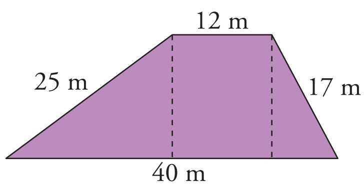


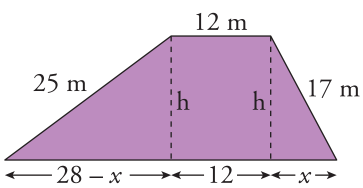


$$\left.\begin{array}{l} h^2 + x^2 = 17^2 \\ (28-x)^2 + h^2 = 25^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 8 \text{ cm} \\ h = 15 \text{ cm} \end{array}\right\}$$

$$A = \frac{28 \cdot 15}{2} = 210 \text{ cm}^2$$

42 ▼▼▽ **Halla la altura del trapecio siguiente. Después, calcula su área.**

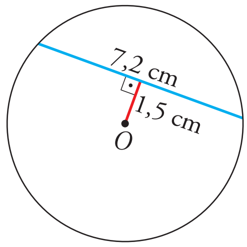




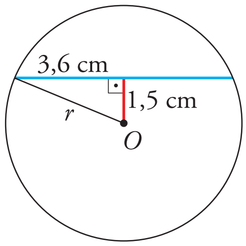
$$\left.\begin{array}{l} 17^2 = h^2 + x^2 \\ 25^2 = h^2 + (28-x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 8 \text{ cm} \\ h = 15 \text{ cm} \end{array}\right\} \rightarrow A = \frac{40+12}{2} \cdot 15 = 390 \text{ m}^2$$

43 ▼▽▽ **a) Calcula el radio de esta circunferencia.**

b) ¿Cuál será la longitud de una cuerda cuya distancia al centro es 2,9 cm?

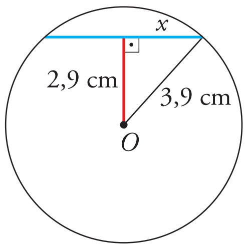


a)



$r = \sqrt{3,6^2 + 1,5^2} = \sqrt{15,21} = 3,9$ cm

b)



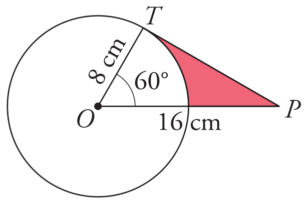
$x = \sqrt{3,9^2 - 2,9^2} = \sqrt{6,8} \approx 2,6$ cm

La longitud de la cuerda será $2 \cdot 2,6 = 5,2$ cm

44 ▼▼▽ **Calcula:**

a) La longitud de *PT*.

b) El área de la parte coloreada.



a) $\overline{PT} = \sqrt{16^2 - 8^2} = \sqrt{192} \approx 13,86$ cm

b) $A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = \dfrac{\pi \cdot 8^2}{360°} \cdot 60° \approx 33,51 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{8 \cdot 13,86}{2} = 54,24 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 54,24 - 33,51 = 20,73 \text{ cm}^2$